अध्याय 4

गणितीय आगमन का सिद्धांत

MATHEMATICAL INDUCTION

प्रश्नावली

निर्देश (प्र. सं. 1 - 18) सभी $n \in N$ के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए।

(प्र. सं. 1 - 18) प्रश्नों का हल तीन चरणों में बाँटा गया है। चरण I में, दाएँ पक्ष में $n = 1$ रखते हैं। यदि बाएँ पक्ष में एक ही पद है, तब यह $n = 1$ के लिए सत्य है। दूसरे चरण में, $n = k$ रखने पर सत्य मानते हैं। समी (i) जैसा तीसरे चरण में, $n = k + 1$ के लिए अंतिम पद में अगला पद जोड़ते हैं और समी (i) का प्रयोग कर हल करते हैं जब तक यह $n = k + 1$ के प्रत्येक मान के लिए सत्य न हो जाए।

प्रश्न 1. $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \dfrac{3^n - 1}{2}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $$P(n): 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

चरण I. $n = 1$ के लिए,

$$P(1): \frac{3^1 - 1}{2} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{k-1} = \frac{3^k - 1}{2} \quad \dots(i)$$

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{k-1}) + 3^k = \frac{3^k - 1}{2} + \frac{3^k}{1} \quad [\text{समी (i) से}]$$

$$= \frac{3^k - 1 + 2 \times 3^k}{2} = \frac{3 \times 3^k - 1}{2} = \frac{3^{k+1} - 1}{2}$$

इसलिए, कथन $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $$P(n): 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]^2$$

चरण I. $n = 1$ के लिए,

$$P(1): \left[\frac{1(1 + 1)}{2}\right]^2 = \left(\frac{1 \times 2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1 = 1^3$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 \quad \ldots(i)$$

चरण III. $n = k + 1$ के लिए, $(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + k^3) + (k+1)^3$

$$= \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 \quad \text{[समी (i) से]}$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{(k+1)^3}{1} = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$

अंश भाग में $(k+1)^2$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= \frac{(k+1)^2\,[k^2 + 4(k+1)]}{4} \quad \frac{(k+1)^2\,(k^2 + 4k + 4)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \quad \frac{(k+1)^2\,[(k+1)+1]^2}{4}$$

$$= \left[\frac{(k+1)\,\{(k+1)+1\}}{2}\right]^2$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 3. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots+n} = \frac{2n}{n+1}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $$P(n): 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots+n} = \frac{2n}{n+1}$$

अर्थात् $$P(n): 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2n}{n+1}$$

$$\left[\because \text{प्राकृत संख्याओं का योग} = \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

चरण I. $n = 1$ के लिए,

$$P(1): \frac{2 \times 1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2k}{k+1} \quad \ldots(i)$$

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$\left[1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{2}{k(k+1)}\right] + \frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2k}{k+1} + \frac{2}{(k+1)(k+2)} \quad \text{[समी (i) से]}$$

$$= \frac{2k(k+2)+2}{(k+1)(k+2)} = \frac{2\,[k^2+2k+1]}{(k+1)(k+2)}$$ (अंश भाग में 2 उभयनिष्ठ लेने पर)

$$= \frac{2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$ $[\because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$

$$= \frac{2(k+1)}{k+2} = \frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

> **नोट** *यदि बाएँ पक्ष का अंतिम पद श्रेणी के रूप में दिया हुआ है जैसे प्रश्न 3 में है, तब सर्वप्रथम इसे हम सरल रूप में लिखते हैं। उचित सूत्र का प्रयोग कर श्रेणी को हल करने की कोशिश करते हैं।*

प्रश्न 4. $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2)$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

चरण I. $n = 1$ के लिए, $\cancel{P(1):}\ \dfrac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{4} \cancel{= 1\cdot 2\cdot 3}$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} \quad \ldots(\text{i})$$

चरण III. $n = k+1$ के लिए,
$$[1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + k(k+1)(k+2)] + (k+1)(k+2)(k+3)$$
$$= \left[\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}\right] + (k+1)(k+2)(k+3)$$
[समी (i) से]
$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

अंश भाग में $(k+1)(k+2)(k+3)$ उभयनिष्ठ लेने पर,
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$
$$= \frac{(k+1)\,[(k+1)+1]\,[(k+1)+2]\,[(k+1)+3]}{4}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 5. $1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ldots+n\cdot 3^n=\dfrac{(2n-1)\,3^{n+1}+3}{4}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $$P(n): 1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ldots+n\cdot 3^n=\frac{(2n-1)\,3^{n+1}+3}{4}$$

चरण I. $n=1$ के लिए,

$$P(1): \frac{(2\cdot 1-1)\,3^{1+1}+3}{4}=\frac{3^2+3}{4}=\frac{9+3}{4}=\frac{12}{4}$$

$\Rightarrow$ $$3=1\cdot 3$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ldots+k\cdot 3^k=\frac{(2k-1)\,3^{k+1}+3}{4} \qquad \ldots(\text{i})$$

चरण III. $n=k+1$ के लिए,

$$(1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ldots+k\cdot 3^k)+(k+1)\,3^{k+1}$$

$$=\frac{(2k-1)\,3^{k+1}+3}{4}+(k+1)\,3^{k+1} \qquad [\text{समी (i) से}]$$

$$=\frac{(2k-1)\,3^{k+1}+3+4\,(k+1)\,3^{k+1}}{4}$$

अंश भाग के प्रथम तथा अंतिम पद में 3^{k+1} उभयनिष्ठ लेने पर,

$$=\frac{3^{k+1}(2k-1+4k+4)+3}{4}\quad\frac{3^{k+1}(6k+3)+3}{4}$$

अंश भाग के प्रथम पद में 3 उभयनिष्ठ लेने पर,

$$=\frac{3^{k+1}\cdot 3(2k+1)+3}{4}=\frac{3^{(k+1)+1}\,(2k+2-1)+3}{4}$$

$$=\frac{\{2(k+1)-1\}\,3^{(k+1)+1}+3}{4}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n\ge 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 6. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)=\left[\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

चरण I. $n=1$ के लिए, $P(1): \dfrac{1(1+1)(1+2)}{3}=\dfrac{1\times 2\times 3}{3}=1\cdot 2$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3} \qquad \ldots(\text{i})$$

चरण III. $n = k + 1$ के लिए, $[1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + k(k+1)] + (k+1)(k+2)$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \qquad \text{[समी (i) से]}$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3}$$

अंश भाग में $(k+1)(k+2)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 7. $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + (2n-1)(2n+1) = \dfrac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $\quad P(n) : 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + (2n-1)(2n+1) = \dfrac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$

चरण I. $n = 1$ के लिए,

$$\frac{1(4 \times 1^2 + 6 \times 1 - 1)}{3} = \frac{4 + 6 - 1}{3} = \frac{9}{3} = 3 = 1 \cdot 3$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $\quad 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + (2k-1)(2k+1) = \dfrac{k(4k^2 + 6k - 1)}{3} \qquad \ldots(i)$

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$[1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + (2k-1)(2k+1)] + (2k - 1 + 2)(2k + 1 + 2)$$

$$= \frac{k(4k^2 + 6k - 1)}{3} + (2k+1)(2k+3) \qquad \text{[समी (i) से]}$$

$$= \frac{k(4k^2 + 6k - 1) + 3(4k^2 + 6k + 2k + 3)}{3}$$

$$= \frac{4k^3 + 6k^2 - k + 12k^2 + 24k + 9}{3} = \frac{4k^3 + 18k^2 + 23k + 9}{3}$$

अब, शेषफल प्रमेय द्वारा गुणनखंड करने पर,

$$= \frac{(k+1)(4k^2 + 14k + 9)}{3} \quad \frac{(k+1)(4k^2 + 8k + 4 + 6k + 5)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)[4(k^2 + 2k + 1) + 6k + 6 - 1]}{3}$$

$$= \frac{(k+1)[4(k+1)^2 + 6(k+1) - 1]}{3}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

नोट *विद्यार्थी को उत्तर के अनुसार व्यवस्था कर लेनी चाहिए।*

प्रश्न 8. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = (n-1)\, 2^{n+1} + 2$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = (n-1)\, 2^{n+1} + 2$

चरण I. $n = 1$ के लिए, $P(1): (1-1)\, 2^{1+1} + 2 = 0 + 2 = 2 = 1 \cdot 2$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + k \cdot 2^k = (k-1)\, 2^{k+1} + 2$ ...(i)

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$(1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + k \cdot 2^k) + (k+1)\, 2^{k+1}$$
$$= [(k-1)\, 2^{k+1} + 2] + (k+1)\, 2^{k+1} \quad \text{[समी (i) से]}$$
$$= (k-1)\, 2^{k+1} + 2 + (k+1)\, 2^{k+1}$$

प्रथम तथा अंतिम पद में 2^{k+1} उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= 2^{k+1}(k - 1 + k + 1) + 2 = 2^{k+1} \times 2k + 2$$
$$= 2^{(k+1)+1} k + 2 = [(k+1) - 1]\, 2^{(k+1)+1} + 2$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 9. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

चरण I. $n = 1$ के लिए, $P(1): 1 - \frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$ ...(i)

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{[समी (i) से]}$$
$$= 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k \cdot 2}$$

अंतिम दो पदों में $\frac{1}{2^k}$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= 1 - \frac{1}{2^k}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 10. $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $$P(n): \frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$$

चरण I. $n=1$ के लिए, $\frac{1}{6\times1+4}=\frac{1}{10}=\frac{1}{2\cdot5}$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\ldots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{k}{6k+4} \quad \ldots(i)$$

चरण III. $n=k+1$ के लिए,

$$\left[\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\ldots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}\right]+\left[\frac{1}{(3k-1+3)(3k+2+3)}\right]$$

$$=\frac{k}{\cancel{6k+4}}+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)} \quad \text{[समी (i) से]}$$

$$=\frac{k}{2(3k+2)}+\frac{1}{(3k+2)\ (3k+5)}$$

$$=\frac{k(3k+5)+2}{2(3k+2)(3k+5)}=\frac{3k^2+5k+2}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{3k^2+3k+2k+2}{2(3k+2)(3k+5)} \quad \frac{3k(k+1)+2(k+1)}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{(k+1)(3k+2)}{2(3k+2)(3k+5)}=\frac{k+1}{2(3k+3+2)}$$

$$=\frac{k+1}{2[3(k+1)+2]}=\frac{k+1}{6(k+1)+4}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 11. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $$P(n): \frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

चरण I. $n=1$ के लिए,

$$\frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)}=\frac{4}{4\times2\times3}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} \quad \ldots(i)$$

चरण III. $n = k+1$ के लिए,

$$\left[\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right]$$
$$+\frac{1}{(k+1)(k+1+1)(k+2+1)}$$
$$=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \quad \text{[समी (i) से]}$$
$$=\frac{k(k+3)^2+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{k(k^2+9+6k)+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

शेषफल प्रमेय द्वारा अंश का गुणनखंड करने पर,

$$=\frac{(k+1)(k^2+5k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{k^2+5k+4}{4(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{k^2+4k+k+4}{4(k+2)(k+3)}\ \frac{k(k+4)+(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}=\frac{(k+1)[(k+1)+3]}{4[(k+1)+1][(k+1)+2]}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 12. $a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $$P(n): a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

चरण I. $n = 1$ के लिए,

अर्थात् $$P(1)=\frac{a(r^1-1)}{r-1}=a$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$a+ar+ar^2+\ldots+ar^{k-1}=\frac{a(r^k-1)}{r-1} \quad \ldots(i)$$

चरण III. $n = k+1$ के लिए,

$$(a+ar+ar^2+\ldots+ar^{k-1})+ar^{k+1-1}=\frac{a(r^k-1)}{r-1}+ar^k \quad \text{[समी (i) से]}$$

$$= \frac{a(r^k - 1) + ar^k (r-1)}{r-1}$$

अंश भाग में a उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= \frac{a(r^k - 1 + r^k \cdot r^1 - r^k)}{r-1} = \frac{a(r^k - 1 + r^{k+1} - r^k)}{r-1} = \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r-1}$$

इसलिए, कथ्यन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 13. $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\cdots\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right) = (n+1)^2$

हल माना दिया हुआ कथ्यन $P(n)$ है।

अर्थात् $$P(n): \left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\cdots\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right) = (n+1)^2$$

चरण I. $n = 1$ के लिए, $P(1) = (1+1)^2 = 2^2 = 4 = \left(1+\frac{3}{1}\right)$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$\left\{\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\cdots\left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right)\right\} = (k+1)^2 \quad \ldots(\text{i})$$

चरण III. $n = k+1$ के लिए,

$$\left\{\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\cdots\left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right)\right\}\left\{1+\frac{2k+1+2}{(k+1)^2}\right\}$$

$$= (k+1)^2 \left[1 + \frac{2k+3}{(k+1)^2}\right] \quad [\text{समी (i) से}]$$

$$= (k+1)^2 \left[\frac{(k+1)^2 + 2k+3}{(k+1)^2}\right] = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3$$

$$= (k+2)^2 = [(k+1)+1]^2 \quad [\because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$$

इसलिए, कथ्यन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 14. $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) = (n+1)$

हल माना दिया हुआ कथ्यन $P(n)$ है।

अर्थात् $$P(n): \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) = (n+1)$$

चरण I. $n = 1$ के लिए, $P(1): 1 + 1 = 1 + \frac{1}{1}$,

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right) = k+1 \quad \ldots(\text{i})$$

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$\left[\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = (k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) \quad \text{[समी (i) से]}$$

$$= (k+1)\left(\frac{k+1+1}{k+1}\right) = (k+1)+1$$

इसलिए, कथन $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 15. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $$P(n): 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

चरण I. $n = 1$ के लिए,

अर्थात् $$P(1): \frac{1(2-1)(2+1)}{3} = \frac{1 \times 1 \times 3}{3} = 1 = 1^2$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} \quad \ldots\text{(i)}$$

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$[1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2] + (2k-1+2)^2$$

$$= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 \quad \text{[समी (i) से]}$$

$$= \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3}$$

अंश भाग में $(2k + 1)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= \frac{(2k+1)[k(2k-1) + 3(2k+1)]}{3}$$

$$= \frac{(2k+1)(2k^2 - k + 6k + 3)}{3} = \frac{(2k+1)(2k^2 + 5k + 3)}{3}$$

मध्य पद विभक्त कर अंश का गुणनखंड करने पर,

$$= \frac{(2k+1)(2k^2 + 2k + 3k + 3)}{3}$$

$$= \frac{(2k+1)[2k(k+1) + 3(k+1)]}{3} = \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(2k+2-1)(2k+2+1)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3}$$

इसलिए, कथन $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 16. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $$P(n): \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

चरण I. $n=1$ के लिए, $$\frac{1}{3\cdot 1+1}=\frac{1}{4}=\frac{1}{1\cdot 4}$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1} \quad \ldots(i)$$

चरण III. $n=k+1$ के लिए,

$$\left[\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}\right]+\frac{1}{(3k-2+3)(3k+1+3)}$$

$$=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)} \quad \text{[समी (i) से]}$$

$$=\frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

मध्य पद विभक्त कर अंश का गुणनखंड करने पर,

$$=\frac{3k^2+3k+k+1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{3k(k+1)+1(k+1)}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{(k+1)(3k+1)}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+3+1}=\frac{k+1}{3(k+1)+1}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अत: गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \ge 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 17. $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{3(2n+3)}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $$P(n): \frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{3(2n+3)}$$

चरण I. $n=1$ के लिए, $P(1): \frac{1}{3(2\times 1+3)}=\frac{1}{3\times 5}=\frac{1}{3\cdot 5}$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k}{3(2k+3)} \quad \ldots(i)$$

चरण III. $n=k+1$ के लिए,

$$\left[\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]+\frac{1}{(2k+1+2)(2k+3+2)}$$

$$= \frac{k}{3(2k+3)} + \frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$$
$$= \frac{k(2k+5)+3}{3(2k+3)(2k+5)} = \frac{2k^2+5k+3}{3(2k+3)(2k+5)}$$

मध्य पद विभक्त कर अंश का गुणनखंड करने पर,

$$= \frac{2k^2+2k+3k+3}{3(2k+3)(2k+5)} = \frac{2k(k+1)+3(k+1)}{3(2k+3)(2k+5)}$$
$$= \frac{(k+1)(2k+3)}{3(2k+3)(2k+5)} = \frac{k+1}{3(2k+2+3)} = \frac{k+1}{3[2(k+1)+3]}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 18. $1+2+3+\ldots+n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $$P(n): 1+2+3+\ldots+n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$$

चरण I. $n = 1$ के लिए,

$$1 < \frac{1}{8}(2\cdot 1+1)^2 \Rightarrow 1 < \frac{1}{8} \times 3^2 \Rightarrow 1 < \frac{9}{8}$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$1+2+3+\ldots+k < \frac{1}{8}(2k+1)^2 \quad \ldots(i)$$

चरण III. $n = k+1$ के लिए,

$$(1+2+3+\ldots+k)+(k+1) < \frac{1}{8}(2k+1)^2+(k+1) \quad \text{[समी (i) से]}$$
$$= \frac{(2k+1)^2}{8} + \frac{k+1}{1} = \frac{(2k+1)^2+8k+8}{8} = \frac{4k^2+1+4k+8k+8}{8}$$
$$= \frac{4k^2+12k+9}{8} = \frac{(2k+3)^2}{8} = \frac{(2k+2+1)^2}{8} = \frac{[2(k+1)+1]^2}{8}$$
$$\Rightarrow 1+2+3+\ldots+k+(k+1) < \frac{[2(k+1)+1]^2}{8}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 19. $n(n+1)(n+5)$ **संख्या 3 का एक गुणज है।**

चरण I में $n = 1$ रखने पर प्राप्त परिणाम 3 का गुणज होना चाहिए। चरण II में (जोकि शर्त वाला गुण है), $n = k$ रखते हैं तथा कोई शून्येत्तर अचर λ (माना) 3 के गुणज के समान रखते हैं। चरण III में $n = k+1$ रखते हैं और इसे तब तक हल करते हैं जब तक यह 3 का गुणज न हो जाए।

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): n(n+1)(n+5)$, संख्या 3 का एक गुणज है।

चरण I. $n=1$ के लिए,

$$1(1+1)(1+5)=1\times 2\times 6=12=3\times 4$$

जो संख्या 3 का गुणज है, जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात्
$$k(k+1)(k+5)=3\lambda$$
$$k(k^2+5k+k+5)=3\lambda$$
$$k^3+6k^2+5k=3\lambda \quad \ldots(i)$$

चरण III. $n=k+1$ के लिए,

$$(k+1)(k+1+1)(k+1+5)$$
$$=(k+1)(k+2)(k+6)=(k^2+2k+k+2)(k+6)$$
$$=(k^2+3k+2)(k+6)=k^3+6k^2+3k^2+18k+2k+12$$
$$=(k^3)+9k^2+20k+12$$
$$=(3\lambda-6k^2-5k)+9k^2+20k+12 \quad \text{[समी (i) से]}$$
$$=3\lambda+3k^2+15k+12=3(\lambda+k^2+5k+4)$$

जोकि संख्या 3 का गुणज है।

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n\geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 20. $10^{2n-1}+1$, **संख्या 11 से भाज्य है।**

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): 10^{2n-1}+1$, 11 से भाज्य है।

चरण I. $n=1$ के लिए, $10^{2\times 1-1}+1=10^{2-1}+1=10^1+1=10+1=11\times 1$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात्
$$10^{2k-1}+1=11\lambda \quad \ldots(i)$$

चरण III. $n=k+1$ के लिए,

$$10^{2(k+1)-1}+1=10^{2k+2-1}+1=10^{(2k-1)+2}+1$$
$$=10^{2k-1}10^2+1=(11\lambda-1)100+1 \quad \text{[समी (i) से]}$$
$$=11\lambda\times 100-100+1$$
$$=11\lambda\times 100-99=11(100\lambda-9)$$

जोकि संख्या 11 का गुणज है।

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n\geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 21. $x^{2n} - y^{2n}$, $x + y$ **से भाज्य है।**

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): x^{2n} - y^{2n}, x + y$ से भाज्य है।

चरण I. $n = 1$ के लिए, $P(1): x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

जो $(x + y)$ से भाज्य है, जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$x^{2k} - y^{2k} = \lambda(x + y) \quad \ldots(i)$$

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)} = x^{2k+2} - y^{2k+2} = x^{2k}x^2 - y^{2k}y^2$$
$$= [\lambda(x + y) + y^{2k}]x^2 - y^{2k}y^2 \quad \text{[समी (i) से]}$$
$$= \lambda(x + y)x^2 + y^{2k}x^2 - y^{2k}y^2$$
$$= \lambda(x + y)x^2 + y^{2k}(x^2 - y^2)$$
$$= \lambda(x + y)x^2 + y^{2k}(x - y)(x + y)$$
$$= (x + y)[\lambda x^2 + y^{2k}(x - y)]$$

जोकि $(x + y)$ का गुणज है अर्थात् $(x + y)$ से भाज्य है।

इसलिए, कथन $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 22. $3^{2n+2} - 8n - 9$ **संख्या 8 से भाज्य है।**

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): 3^{2n+2} - 8n - 9$ संख्या 8 से भाज्य है।

चरण I. $n = 1$ के लिए,

अर्थात् $P(1): 3^{2\times1+2} - 8\times1 - 9 = 3^4 - 8 - 9 = 81 - 17 = 64 = 8\times8$

जोकि संख्या 8 से भाज्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $$3^{2k+2} - 8k - 9 = 8\lambda \quad \ldots(i)$$

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$3^{2(k+1)+2} - 8(k + 1) - 9$$
$$= 3^{2k+2+2} - 8k - 8 - 9 = 3^{2k+2}3^2 - 8k - 17$$
$$= (8\lambda + 8k + 9)3^2 - 8k - 17 \quad \text{[समी (i) से]}$$
$$= (8\lambda + 8k + 9)9 - 8k - 17$$
$$= 72\lambda + 72k + 81 - 8k - 17$$
$$= 72\lambda + 64k + 64 = 8(9\lambda + 8k + 8)$$

जोकि संख्या 8 से भाज्य है।

इसलिए, कथन $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 23. $41^n - 14^n$ संख्या 27 का एक गुणज है।

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): 41^n - 14^n$, संख्या 27 का एक गुणज है।

चरण I. $n = 1$ के लिए,

अर्थात् $P(1) = 41^1 - 14^1 = 27 = 1 \times 27$

जो 27 का एक गुणज है, जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $41^k - 14^k = 27\lambda$ ...(i)

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$41^{k+1} - 14^{k+1} = 41^k\, 41 - 14^k\, 14 = (27\lambda + 14^k)\, 41 - 14^k\, 14 \quad \text{[समी (i) से]}$$
$$= 27\lambda \times 41 + 14^k \times 41 - 14^k \times 14$$
$$= 27\lambda \times 41 + 14^k\,(41 - 14)$$
$$= 27\lambda \times 41 + 14^k \times 27 = 27\,(41\lambda + 14^k)$$

जोकि 27 का गुणज है।

इसलिए, कथन $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 24. $(2n + 7) < (n + 3)^2$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): (2n + 7) < (n + 3)^2$

चरण I. $n = 1$ के लिए, $P(1): 2 \times 1 + 7 < (1 + 3)^2 = 9 < 16$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $2k + 7 < (k + 3)^2$ ...(i)

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$2\,(k + 1) + 7 = 2k + 2 + 7 = (2k + 7) + 2 < (k + 3)^2 + 2$$
$$= k^2 + 9 + 6k + 2 \quad \text{[समी (i) से]}$$
$$= k^2 + 8k + 16 - 2k - 5$$
$$= (k + 4)^2 - (2k + 5) < (k + 4)^2 \quad [\because (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$$
$$= [(k + 1) + 3]^2$$

$\Rightarrow [2\,(k + 1) + 7] < [(k + 1) + 3]^2$

इसलिए, कथन $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

> **नोट** *सभी प्रश्नों में, चरण III में यह स्पष्ट है कि जब $n = k + 1$, तब हम अगले पद से अंतिम पद लेते हैं।*